

Pression et entropie cosmique thermodynamique de Wojnow dans le référentiel $R_H = ct$

Auteur : Stéphane Wojnow (travail réalisé avec Vibe Mistral, complété par une analyse d'OpenAI portant sur les affirmations de la V.01 et par la révision du document) —
Date : 23 septembre 2026

wojnow.stephane@gmail.com

Résumé

Ce document répond à la question suivante : « Peut-on associer une pression à l'entropie de Wojnow dans le référentiel $R_H = ct$? » Dans le cadre des hypothèses propres au modèle retenues ici, nous définissons une pression effective de trajectoire par $P_{eff} = -dE_{RH}/dV_H$. Nous montrons que cette quantité peut être exprimée en fonction du produit $T_{RH}S_{RH} = E_{RH}$. La formule obtenue est une représentation algébrique le long de la trajectoire cosmologique $R_H = ct$; elle n'est pas présentée comme une dérivation indépendante d'une pression thermodynamique d'équilibre.

Mots-clés : cosmologie, modèle $R_H = ct$, entropie cosmique thermodynamique, entropie de Wojnow, pression effective de trajectoire, densité d'énergie critique, rayon de Hubble, température du fond diffus cosmologique

1. Introduction : la question initiale

Le point de départ de cette analyse est la question suivante, posée dans le contexte du référentiel cosmologique $R_H = ct$:

« En principe, il devrait être possible d'associer une pression à l'entropie de Wojnow dans ce référentiel. Comment ? »

Cette question découle du traitement thermodynamique de l'Univers dans le modèle $R_H = ct$, où la température du fond diffus cosmologique (CMB), T_{CMB} , et la densité d'énergie critique, $\rho_{E,c}$, sont des grandeurs fondamentales. L'entropie cosmique thermodynamique S_{RH} , introduite par Wojnow (voir [10], ainsi que la relation explicite entre H et T_{CMB}), joue un rôle central en reliant ces grandeurs au moyen des relations thermodynamiques propres au modèle retenues ici, conjointement avec les relations gravitationnelles usuelles.

Le modèle $R_H = ct$, proposé initialement par Fulvio Melia [1,2,3], constitue une alternative intéressante au paradigme standard Λ CDM. Dans ce cadre, l'égalité $R_H = ct$ (où R_H est le rayon de Hubble et t le temps cosmique) n'est pas une coïncidence propre à l'époque actuelle,

mais une contrainte relativiste fondamentale déduite du théorème de Birkhoff et du postulat de Weyl. Dans le contexte de ce modèle, Melia a montré sa compatibilité avec de nombreuses observations cosmologiques, notamment les données de supernovæ et les oscillations acoustiques baryoniques.

Le présent document propose une dérivation pas à pas de la pression associée à l'entropie de Wojnow.

2. Cadre théorique et formules fondamentales

2.1 Le modèle cosmologique $R_H = ct$

Dans le cadre $R_H = ct$, le rayon de Hubble est défini par :

$$R_H = c/H = ct$$

où H est le paramètre de Hubble et t le temps cosmique. Cette égalité est valable à tout instant cosmique dans un univers plat ; elle représente une contrainte fondamentale et non une coïncidence temporelle.

2.2 Énergie à l'horizon de Hubble

En utilisant la relation masse–rayon de type Schwarzschild comme identification propre au modèle pour l'horizon de Hubble, l'énergie contenue s'écrit :

$$E_{R_H} = \frac{c^4 R_H}{2G} \quad (2.1)$$

Cette formule découle de l'analogie entre trou noir et Univers :

- Pour un trou noir de Schwarzschild : $E = M c^2$, avec $M = \frac{c^2 R_S}{2G}$ (masse de Schwarzschild)
- Ainsi, $E_{R_H} = M c^2 = \frac{c^4 R_H}{2G}$.

2.3 Relations thermodynamiques

2.3.a Conservation de l'énergie

Nous adoptons $E_{R_H} = T_{R_H} S_{R_H} = \frac{c^4 R_H}{2G}$ comme identification thermodynamique propre au modèle ; nous adoptons également $N = T_{Pl}/T_{R_H}$:

$$E_{R_H} = T_{R_H} S_{R_H} \quad (2.2)$$

où T_{RH} est la température à l'horizon de Hubble, identifiée à la température du CMB après le découplage : $T_{RH} = T_{CMB}$. Il s'agit d'une identification thermodynamique propre au modèle, supposée ici constituer une identité générale d'équilibre.

2.3.b Formule de l'entropie cosmique de Wojnow

Wojnow [11, 8] a introduit l'expression suivante pour l'entropie cosmique thermodynamique :

$$S_{RH} = 16\pi^2 k_B \left(\frac{T_{CMB}}{T_{Pl}} \right) \left(\frac{t_{RH}^2}{t_{Pl}^2} \right) \quad (2.3)$$

où les constantes de Planck sont définies par :

- Température de Planck : $T_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}$
- Temps de Planck : $t_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$

2.3.c Formule de Tatum, Seshavatharam et Lakshminarayana

$$T_{CMB} = T_{RH} = \left(\frac{T_{Pl}}{8\pi} \right) \left(\sqrt{\frac{2l_{Pl}}{R_H}} \right) \quad (2.4)$$

Nous utilisons la relation H, T_{CMB} de l'équation 2.4, proposée par Tatum, Seshavatharam et Lakshminarayana, S. (2015), voir [4]. Cette relation a été démontrée par Haug et Wojnow (2023), voir [5], puis publiée par Haug (2024), voir [6].

2.4 Volume de la sphère de Hubble

Le volume associé au rayon de Hubble est :

$$V = \left(\frac{4}{3} \right) \pi R_H^3 \quad (2.5)$$

2.5 Densité d'énergie critique

Dans le modèle $R_H = ct$, la densité d'énergie critique est donnée par :

$$\rho_{E,c} = \frac{3 c^4}{8\pi G R_H^2} \quad (2.6)$$

Cette expression peut également s'écrire en fonction de la température du CMB [5,6], [7-8] :

$$\rho_{E,c} = 384 \frac{\pi^3 k_B^4 T_{CMB}^4}{\hbar^3 c^3} (2.7)$$

3. Dérivation de la pression à partir de l'entropie de Wojnow

3.1 Définition thermodynamique de la pression

Comme l'entropie et l'énergie de l'intérieur cosmologique assimilé à un trou noir évoluent toutes deux avec R_H , la définition d'équilibre $P_{eff} = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S$ n'est pas directement applicable le long de la trajectoire cosmologique.

Nous définissons donc une pression effective propre au modèle, associée à la variation du volume intérieur du trou noir :

$$P_{eff} = - \left(\frac{dE_{RH}}{dV_H} \right) (3.1)$$

Dans la suite de ce document, (P_{eff}) désigne uniquement cette grandeur effective définie le long de la trajectoire. Sans argument dynamique supplémentaire, elle ne doit pas être assimilée à la pression d'équilibre $P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S$.

Cette grandeur représente l'opposé du taux de variation de l'énergie contenue par rapport au volume intérieur géométrique, le long de la trajectoire $R_H = ct$. Elle ne doit être confondue ni avec la pression thermodynamique usuelle obtenue par une dérivée partielle à entropie constante, ni avec la pression associée à une constante cosmologique variable dans la thermodynamique étendue des trous noirs.

3.2 Calcul des dérivées partielles

À partir de l'équation (2.1), la dérivée de l'énergie par rapport à R_H est :

$$\frac{dE_{RH}}{dR_H} = \frac{c^4}{2G} (3.2)$$

- **Source : dérivation directe de l'équation (1),** $E_{RH} = c^4 R_H / (2G)$
- **Origine :** cette expression de E_{RH} provient de l'analogie entre trou noir et Univers en relativité générale, bien établie dans la littérature (Bekenstein, Hawking et travaux ultérieurs sur la thermodynamique des horizons).
- **Référence :** Melia (2021), *Thermodynamics of the $R_h = ct$ Universe: a simplification of cosmic entropy* [9], utilise explicitement cette analogie.

À partir de l'équation (2.5), la dérivée du volume par rapport à R_H est :

$$\frac{dV_H}{dR_H} = 4\pi R_H^2 \quad (3.3)$$

Il s'agit de dérivées le long de la trajectoire cosmologique linéaire paramétrée par $R_H=ct$.

3.3 Expression de la pression en fonction de R_H

En appliquant la règle de dérivation en chaîne :

$$P_{eff} = - \frac{\left(\frac{dE_{R_H}}{dR_H} \right)}{\left(\frac{dV}{dR_H} \right)} \quad (3.4)$$

Il s'agit de dérivées le long de la trajectoire cosmologique linéaire paramétrée par $R_H=ct$.

$$P_{eff} = - \frac{\left(\frac{c^4}{2G} \right)}{4\pi R_H^2} \quad (3.5)$$

$$P_{eff} = - \frac{c^4}{8\pi G R_H^2} \quad (3.6)$$

3.4 Relation entre R_H , T_{CMB} et S_{R_H}

D'après les équations (2.1) et (2.2), nous avons $E_{R_H} = T_{CMB} S_{R_H} = \frac{c^4 R_H}{2G}$. En isolant R_H :

$$R_H = 2G \frac{T_{CMB} S_{R_H}}{c^4} \quad (3.7)$$

En élevant les deux membres au carré :

$$R_H^2 = 4 \frac{G^2 T_{CMB}^2 S_{R_H}^2}{c^8} \quad (3.8)$$

3.5 Expression de la pression effective de trajectoire en fonction du produit $T_{R_H} S_{R_H}$

En substituant l'équation (3.8) dans l'équation (3.6) :

$$P_{eff} = - \frac{c^4}{8\pi G \left(4 \frac{G^2 T_{CMB}^2 S_{RH}^2}{c^8} \right)} \quad (3.9)$$

$$P_{eff} = - c^4 \cdot \frac{c^8}{32\pi G^3 T_{CMB}^2 S_{RH}^2} \quad (3.10)$$

$$P_{eff} = - \frac{c^{12}}{32\pi G^3 (T_{CMB} S_{RH})^2} \quad (3.11)$$

Il s'agit du principal résultat algébrique de la présente note. La pression effective de trajectoire peut être exprimée en fonction du produit $T_{RH} S_{RH}$. Comme $T_{RH} S_{RH} = E_{RH}$, cette relation est une réécriture du résultat géométrique $P_{eff} = -c^4/(8\pi G R_H^2)$, et non une dérivation indépendante de la pression à partir de la seule entropie.

3.6 Autre expression : pression en fonction de la densité d'énergie critique

À partir des équations (2.6) et (3.6), ou de l'équation (3.11) avec les formules $T_{CMB}^2 S_{RH}^2$ (voir [5], [10, 8]), nous observons que :

$$P_{eff} = - \frac{c^4}{8\pi G R_H^2} = - \left(\frac{1}{3} \right) \left(3 \frac{c^4}{8\pi G R_H^2} \right) \quad (3.12)$$

$$P_{eff} = - \frac{\rho_{E,c}}{3} \quad (3.13)$$

On obtient ainsi une relation entre la pression et la densité d'énergie critique dans le modèle thermodynamique $R_H = ct$.

Selon la définition propre au modèle adoptée dans l'équation (3.1), la pression effective vérifie $dE_{RH} = - P_{eff} dV$ (3.14)

L'équation (3.14) est donc une identité le long de la trajectoire cosmologique ; elle n'est pas présentée comme la première loi complète de la thermodynamique des trous noirs. En particulier, elle ne remplace pas le terme d'entropie d'horizon usuel faisant intervenir la température de Hawking T_{Hw} et l'entropie de Bekenstein-Hawking S_{BH} .

Puisque $P_{eff} < 0$ et $dV > 0$ au cours de l'expansion, cela implique $dE_{RH} > 0$,

$$E_{RH} = \frac{c^4 R_H}{2G} \quad (3.15)$$

ce qui est cohérent avec l'augmentation de l'énergie contenue à l'échelle de Hubble dans l'analogie avec un trou noir.

4. Interprétation de la pression effective négative

4.1 Pression du vide dans la cosmologie standard Λ CDM

Dans le modèle cosmologique standard Λ CDM, l'énergie noire est décrite par une constante cosmologique Λ , correspondant à une densité d'énergie du vide ρ_{vac} . La relation d'état de l'énergie du vide est caractérisée par une pression $P_{vac}^{\Lambda CDM} \neq P_{eff}^{R_H=ct}$ qui vérifie :

$$P_{vac}^{\Lambda CDM} = -\rho_{vac} \quad (4.1)$$

Cette relation découle des propriétés thermodynamiques du vide : la pression est égale en valeur absolue à la densité d'énergie, mais de signe opposé. Cette pression négative est responsable de l'expansion accélérée de l'Univers.

Dans le cadre Λ CDM :

- La densité d'énergie du vide est constante : $\rho_{vac} = \Lambda \frac{c^4}{8\pi G}$
- La pression est $P_{vac}^{\Lambda CDM} = -\rho_{vac} = -\Lambda c^4 / (8\pi G)$
- Cela correspond à un paramètre de relation d'état $w = P/\rho = -1$.

4.2 Pression effective dans la cosmologie $R_H = ct$ de Melia

Dans le modèle cosmologique $R_H = ct$ de Melia, la relation pression–densité a d'abord été dérivée rigoureusement par Melia [9] à partir des équations de Friedmann combinées à la contrainte fondamentale $R_H = ct$ ($H = 1/t$). Le résultat essentiel, $P = -\rho/3$, découle directement de la dynamique cosmique et ne constitue pas une hypothèse ad hoc.

Dérivation de Melia [9] : à partir des équations de Friedmann pour un univers FLRW plat :

- $H^2 = (8\pi G/3) \rho$
- $\dot{m}H = -4\pi G (\rho + p)$

Comme $R_H = ct$ implique $\dot{m}H = -H^2$, la substitution donne : $\rho + P_{eff} = H^2/(4\pi G) = (2/3) \rho \Rightarrow P_{eff} = -\rho/3$.

Cette expression fait apparaître des différences fondamentales avec le modèle standard Λ CDM, avec d'importantes conséquences cosmologiques :

1. **Relation d'état différente : le modèle $R_H = ct$ vérifie $P = -\rho/3$ ($w = -1/3$), tandis que Λ CDM vérifie $P = -\rho$ ($w = -1$).** Remarque : la relation $P = -\rho/3$ n'est donc pas revendiquée ici comme un résultat nouveau. Elle constitue déjà une propriété dynamique déterminante du cadre $R_H = ct$ de Melia. *L'apport du présent travail*

consiste plutôt à exprimer explicitement la pression effective correspondante en fonction de l'entropie thermodynamique de Wojnow et de la température du CMB :

$$P_{eff} = -\frac{c^{12}}{32\pi G^3 T_{CMB}^2 S_{RH}^2}, \text{ soit notre équation (3.11) reprise ici.}$$

2. Conséquences physiques :

- Dans Λ CDM, l'énergie noire avec $w = -1$ conduit à une expansion exponentielle (phase de de Sitter), ce qui nécessite une constante cosmologique Λ .
 - Dans $R_H = ct$, la valeur $w = -1/3$ correspond à un univers à expansion linéaire ($R_H \propto t$), caractéristique fondamentale du modèle de Melia.
 - **Le modèle $R_H = ct$ ne nécessite pas d'énergie noire pour expliquer l'accélération cosmique, car l'expansion linéaire s'accorde naturellement avec les données observationnelles sans faire intervenir Λ .**
3. **Cohérence thermodynamique : la relation [9] $P = -\rho/3$ a été déduite de la dynamique cosmique. Sous les hypothèses thermodynamiques et cosmologiques propres au modèle retenues ici ($E = TS$, $P = -dE/dV$), appliquées à l'horizon de Hubble avec l'entropie de Wojnow S_{RH} , le présent calcul fournit une représentation géométrique de cette même relation au moyen de la définition propre au modèle.**
4. **Conséquences cosmologiques : l'équivalence $\rho_{E,c} = \rho_c$ (densité critique de Melia) confirme que, dans le cadre $R_H = ct$, l'expression $P = -\rho/3$ constitue une propriété fondamentale du champ gravitationnel à l'horizon de Hubble, maintenant la contrainte $R_H = ct$ à tout instant cosmique sans composante supplémentaire d'énergie noire.**

4.3 Interprétation physique

1. La relation $P_{eff} = -\rho_{E,c}/3$ découle de la définition de trajectoire $P_{eff} = -dE_{RH}/dV_H$, conjointement avec $E_{RH} \propto R_H$ et $V_H \propto R_H^3$. L'entropie de Wojnow ne produit pas cette pression de manière indépendante. L'identité $E_{RH} = T_{RH} S_{RH}$ permet plutôt de paramétrer la même pression effective de trajectoire au moyen du produit thermodynamique $T_{RH} S_{RH}$.
2. **Interprétation géométrique : le facteur 1/3 provient de la géométrie sphérique de l'horizon de Hubble ($V \propto R_H^3$).**

4.4 Comparaison avec l'entropie de Bekenstein-Hawking

Il est instructif de comparer l'entropie de Wojnow à l'entropie de Bekenstein-Hawking d'un trou noir :

- Bekenstein-Hawking : $S_{BH} = k_B c^3 A / (4 \hbar G) = \pi k_B c^3 R_S^2 / (\hbar G)$, où A est l'aire de l'horizon ($A = 4\pi R^2$)
- Entropie de Wojnow : $S_{RH} = 16\pi^2 k_B^2 T_{CMB} R_H^2 c^{1/2} / (\hbar^{3/2} G^{1/2})$

Les deux entropies sont proportionnelles à l'aire de l'horizon (R^2), mais l'entropie de Wojnow intègre la température du CMB et la physique à l'échelle de Planck, ce qui la rend spécifiquement adaptée aux applications cosmologiques dans le cadre $R_H = ct$ de Melia.

5. Formules utilisées dans cette dérivation

La relation $P_{eff} = -\rho_{E,c} / 3$ n'est pas revendiquée ici comme une nouvelle relation d'état. L'apport de la présente note se limite à montrer que, sous l'identité adoptée $E_{RH} = T_{RH} S_{RH}$, la pression effective de trajectoire peut s'écrire :

$$P = -c^{12} / (32\pi G^3 T_{CMB}^2 S_{RH}^2) \quad (3.11) \text{ ou, de manière équivalente : } P = -\frac{\rho_{E,c}}{3} \quad (3.13)$$

Cette formule ne contient aucune information indépendante du produit $S_{RH} T_{RH} = E_{RH}$. Elle fournit une paramétrisation thermodynamique de la pression effective de trajectoire.

Numéro de l'équation	Formule	Description
(2.1)	$E_{RH} = c^4 R_H / (2G)$	Énergie à l'horizon de Hubble (RG)
(2.2)	$E_{RH} = T_{CMB} S_{RH}$	Relation thermodynamique
(2.3)	$S_{RH} = 16\pi^2 k_B \left(\frac{T_{CMB}}{T_{Pl}} \right) \left(\frac{t_{RH}^2}{t_{Pl}^2} \right)$	Formule de l'entropie de Wojnow
(2.5)	$V = (4/3)\pi R_H^3$	Volume de la sphère de Hubble
(2.6)	$\rho_{E,c} = 3 c^4 / (8\pi G R_H^2)$	Densité d'énergie critique
(2.7)	$\rho_{E,c} = 384 \pi^3 k_B^4 T_{CMB}^4 / (\hbar^3 c^3)$	Densité critique en fonction de T_{CMB}
	$P = -(\partial E / \partial V)$	Définition de la pression
(3.6)	$P = -c^4 / (8\pi G R_H^2)$	Pression en fonction de R_H
(3.11)	$P = -c^{12} / (32\pi G^3 (T_{CMB} S_{RH})^2)$	Résultat principal : pression en fonction du produit $S_{RH} T_{CMB}$
(3.13)	$P_{eff} = -\rho_{E,c} / 3$	Pression dans $R_H = ct$ en fonction de la densité d'énergie critique
(4.1)	$P_{vac} = -\rho_{vac}$	Pression du vide dans Λ CDM

6. Conclusion

La relation $P_{eff} = -\frac{\rho_{E,c}}{3}$ n'est pas revendiquée ici comme une nouvelle relation d'état. Sous l'identité adoptée $E_{RH} = T_{CMB} S_{RH}$, la pression effective de trajectoire peut être exprimée en fonction du produit $T_{CMB} S_{RH}$. Cette relation est une réécriture du résultat géométrique le long de la trajectoire et ne constitue pas une dérivation indépendante de la pression à partir de la seule entropie. $P = -c^{12} / (32\pi G^3 (T_{CMB} S_{RH})^2)$, conjointement avec la loi d'échelle de l'entropie :

$$S_{R_H}^{\frac{2}{3}} \propto R_H \propto t.$$

Ou, de manière équivalente :

$$P_{eff}^{(Melia)} = P_{eff}^{(traj)} = - \frac{\rho_{E,c}}{3}$$

Cette pression reçoit des interprétations distinctes dans le modèle standard Λ CDM (où $P = -\rho$), mais elle est compatible avec le modèle $R_H = ct$ de Melia (où $P = -\rho/3$ et $\rho^{(Melia)} = \rho_{E,c}$). Dans la représentation de Wojnow, cette pression effective accompagne l'expansion du volume de Hubble V_H , tandis que T_{R_H} diminue et que l'énergie contenue E_{R_H} augmente conformément aux relations thermodynamiques $R_H = ct$ adoptées. Sous nos hypothèses, elle résulte d'une évolution thermodynamique couplée de T_{R_H} et S_{R_H} dans un système dont le volume et l'énergie augmentent. Cette évolution couplée est cohérente avec l'équation (3.11), $dE_{R_H} = -P_{eff} dV$, de sorte que l'augmentation de l'énergie contenue accompagne l'expansion du volume de Hubble dans la description adoptée en termes de pression effective.

Sous les hypothèses thermodynamiques et cosmologiques propres au modèle retenues ici, les relations obtenues sont cohérentes entre elles. Le facteur $1/3$ du modèle $R_H = ct$ le distingue du cadre standard Λ CDM et découle directement des propriétés géométriques et thermodynamiques de l'horizon de Hubble dans cet autre paradigme cosmologique.

La structure d'échelle mise en évidence ici peut inciter à rechercher des systèmes thermodynamiques analogues dans lesquels une température décroissante et une entropie croissante se combinent pour produire une énergie interne croissante. L'existence de tels analogues hors de la cosmologie reste une question ouverte.

7. Références

- [1] Melia, F., Shevchuk, A.S.H. (2012). The $R_H = ct$ universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419(3), 2579-2586. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19906.x>
- [2] Melia, F. (2024). Strong observational support for the $R_H = ct$ timeline in the early universe. *Physics of the Dark Universe*, 46, 101587. <https://doi.org/10.1016/j.dark.2024.101587>
- [3] Melia, F. (2023). Model selection with baryonic acoustic oscillations in the Lyman- α forest. *Europhysics Letters*, 143(5), 59004. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/acf60c>
- [4] Tatum, E.T., Seshavatharam, U.V.S., Lakshminarayana, S. (2015). The Basics of Flat Space Cosmology. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 5, 116-124. <https://doi.org/10.4236/ijaa.2015.52015>
- [5] Haug, E.G., Wojnow, S. (2024). How to predict the temperature of the CMB directly using the Hubble parameter and the Planck scale using the Stefan-Boltzmann law. HAL Archive. <https://hal.science/hal-04269991>

- [6] Haug, E.G. (2025). CMB, Hawking, Planck, and Hubble scale relations consistent with recent quantization of general relativity theory. *International Journal of Theoretical Physics*, 63, 57. <https://doi.org/10.1007/s10773-024-05570-6>
- [7] Haug, E. Tatum, E. (2025). Friedmann type equations in thermodynamic form lead to much tighter constraints on the critical density of the universe. *Discover Space*, 129, 6. <https://doi.org/10.1007/s11038-025-09566-y>
- [8] Wojnow, S. (2025). Another Way to Derive the Critical Energy Density in Terms of CMB Temperature and the Role of Wojnow's Thermodynamic Cosmic Entropy in $R_h=ct$ Cosmology. Preprints. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15573.38888>
- [9] Melia, F. (2021). Thermodynamics of the $R_H = ct$ Universe: a simplification of cosmic entropy. *The European Physical Journal C*, 81, 9028. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09028-5>
- [10] Wojnow, S. (2025). An Exact Formula for Cosmic Entropy in $RH = ct$ Cosmological Model. Preprints. <https://doi.org/10.20944/preprints202508.1329.v5>.